

28-29 сентября 2017 г. кафедра развития образовательных систем ГАУ ДПО РБ БРИОП совместно издательством «Экзамен» (г. Москва) провела двухдневный учебно-методический семинар для учителей математики Республики Бурятия по теме «Реализация Концепции развития математического образования. Итоговая аттестация и промежуточная диагностика» с участием Высоцкого Ивана Ростиславовича – председателя федеральной комиссии по разработке КИМ ЕГЭ по математике, доцента Московского института открытого образования, автора пособий по подготовке к ЕГЭ по математике, лауреата премии Правительства РФ.

На семинаре были рассмотрены следующие вопросы:

- краткий обзор результатов ЕГЭ 2016 г;
- особенности ГИА по математике (ОГЭ, ЕГЭ- 2018 г.);
- перспективные модели ОГЭ и ЕГЭ по математике;
- методика подготовки к ЕГЭ в условиях двухуровневого экзамена и разноуровневых образовательных программ нового поколения;
- методы решения стереометрических задач.

Также были обсуждены актуальные вопросы школьного математического образования, содержание примерных программ по математике основного общего образования, учебно-методических комплектов нового поколения и др.

Оживленную дискуссию вызвало использование в образовательном процессе электронных приложений к учебным пособиям по подготовке ГИА по математике.

Иван Ростиславович ознакомил присутствующих с новыми материалами, размещенными на сайте поддержки преподавания теории вероятностей и статистики в школе. Сайт рассчитан на учителей и школьников, публикует все материалы, полезные при изучении и преподавании статистики и вероятности в школе: уроки, статьи, таблицы распределений, базы данных и т.п. На сайте проводится дистанционная версия кружка МЦНМО по вероятности, а также олимпиада для школьников.

## ЗАДАЧА ДНЯ (29.09.2017- 12.10.2017)

### Задача 23(61) (29 сентября 2017, 1 балл)

На антарктической станции 20 полярников, все разного возраста. С вероятностью 0,2 между каждыми двумя полярниками завязываются дружеские отношения, независимо от других симпатий или антипатий.

Когда зимовка закончилась и наступила пора разъезжаться по домам, в каждой паре друзей старший даёт младшему дружеский совет. Найдите математическое ожидание числа тех, кто не получил ни одного дружеского совета.



В семинаре приняли участие 137 учителей математики общеобразовательных организаций из 18 районов и г. Улан-Удэ .

Все участники получили сертификаты.

В завершении участники выразили благодарность за организацию и проведение семинара.

В 2015 году в ЕГЭ по математике появилась задача, которую называют «задачей с экономическим содержанием». Первое, что должен сделать учитель, который собирается с учащимися решать эту задачу, посмотреть спецификацию КИМ ЕГЭ 2016 года и кодификатор элементов содержания КИМ по математике.

17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	Повышенный	35 минут
----	---	-------------	----------------------------	------------	----------

**Кодификатор элементов содержания КИМ ЕГЭ 2016 математике:**

- **1.1.1** Целые числа
- **1.1.3** Дроби, проценты, рациональные числа
- **2.1.12** Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

**Критерии оценивания решения задачи:**

- Обоснованно получен правильный ответ - 3
- Получено верное выражение для ежегодного платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу - 2
- С помощью верных рассуждений получено уравнение, из которого может быть найдено значение ежегодного платежа, но коэффициенты уравнение неверные из-за ошибки в вычислениях - 1
- Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше - 0

**Максимальный балл 3**

Итак, познакомились и обратили для себя внимание, что проверяют умение работать с числами и применять математические методы для решения содержательной задачи.

С какой задачи лучше начать? На мой взгляд, лучше сначала решить задачу, которую можно решить арифметическим путем. Эта задача поможет ученику понять, что такое кредит и как начисляются проценты, возможно, придется решить с детьми не одну, а 3 или даже 4 похожие задачи.

**1. Матвей хочет взять кредит в 1,4 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Матвей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?**

Решение:

При начислении процента оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент. Коэффициент рассчитывается по формуле  $1 + 0,01a$ , где  $a$  – это годовая ставка процента.

Так как годовая ставка процента составляет 10%, коэффициент равен  $1 + 0,01 \cdot 10 = 1,1$ . В первый год Матвей выплатит 320 тысяч рублей. Тогда получаем  $1400\ 000 - 320\ 000 = 1080\ 000$ , и затем на остаток начисляется годовой процент, т.е. сумму остатка  $1080\ 000 \cdot 1,1 = 1\ 188\ 000$  и т.д. Для удобства можно заполнить следующую таблицу:

Год	Сумма долга	Остаток после ежегодной выплаты
0	1400000	1400000
1	$1400000 \cdot 1,1 = 1540000$	$1540000 - 320000 = 1220000$
2	$1220000 \cdot 1,1 = 1342000$	$1342000 - 320000 = 1022000$
3	$1022000 \cdot 1,1 = 1124200$	$1124200 - 320000 = 804200$
4	$804200 \cdot 1,1 = 884620$	$884620 - 320000 = 564620$
5	$564620 \cdot 1,1 = 621082$	$621082 - 320000 = 301082$
6	$301082 \cdot 1,1 = 331190,2$	$331190,2 - 320000 = 11190,2$
7	$11190,2 \cdot 1,1 = 12309,22$	12309,22 – это сумма последнего платежа

Из таблицы видим, что минимальное количество лет, на которое может Матвей взять кредит, составляет 7 лет.

Ответ: 7 лет

*Задачи для самостоятельного решения:*

1. Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей? Ответ: 9

2. Оля хочет взять в кредит 1 200 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 000 рублей? Ответ: 5

**2. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на 10 %), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами ( то есть за четыре года)?**

Решение:

- 1) Внимательно прочитайте с учащимися задачу;
- 2) Объясните ученикам, что платит Матвей одинаковую сумму каждый год;
- 3) Составьте с учениками уравнение:

Пусть  $x$  - это ежегодная выплата, тогда 31 декабря 2015 года сумма долга увеличится на 10%, то есть

$9282000 * 1,1$  – сумма долга до первой выплаты

Затем Матвей производит выплату

$9282000 \cdot 1,1 - x$  - эта же сумма является остатком на следующей год;

$(9282000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x$  - это остаток после второй выплаты;

$((9282000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x$  - это остаток после третьей выплаты;

$((((9282000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x)$  - это остаток после четвертой выплаты, который должен быть равным нулю, так как по условию задачи Матвей расплатился с кредитом.

Получили уравнение:

$$(((9282000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 0$$

Теперь задача учителя объяснить, как правильно раскрыть скобки.

Раскроем скобки постепенно, начиная с первой:

$$(9282000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 = 9282000 \cdot 1,1 \cdot 1,1 - x \cdot 1,1 = 9282000 \cdot 1,1^2 - x \cdot 1,1$$

$$(9282000 \cdot 1,1^2 - x \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 = (9282000 \cdot 1,1^2 - 2,1 \cdot x) \cdot 1,1 = 9282000 \cdot 1,1^3 - 2,1 \cdot 1,1 \cdot x$$

$$(9282000 \cdot 1,1^3 - 2,1 \cdot 1,1 \cdot x - x) \cdot 1,1 = (9282000 \cdot 1,1^3 - 2,31 \cdot x -$$

$$x) \cdot 1,1 = (9282000 \cdot 1,1^3 - 3,31 \cdot x) \cdot 1,1 =$$

$$9282000 \cdot 1,1^4 - 3,31 \cdot 1,1 \cdot x - x = 0$$

$$9282000 \cdot 1,1^4 - 3,641 \cdot x - x = 0$$

$$9282000 \cdot 1,1^4 - 4,641 \cdot x = 0$$

Как видите, мы получили простое линейное уравнение. Решим его.

$$X = \frac{9282000 \cdot 1,1^4}{4,641}$$

При нахождении неизвестного числа, не торопитесь считать столбиком, сначала внимательно посмотрите на числа, как правило, дробь сокращается.

$$\frac{9282000 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1}{4,641} = \frac{9282 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11}{46,41} = \frac{9282 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 1100}{4641} = 2 \cdot 121 \cdot 121 \cdot 100 = 2928200$$

Ответ: 2928200

*Задачи для самостоятельного решения:*

1. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?  
 Ответ: 3 993 000 рублей.

2. 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Владимир переводит в банк 4 548 600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?  
 Ответ: 7 490 000

**3. 31 декабря 2010 года Иван взял в банке 900900 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Иван переводит в банк платёж. Весь долг Иван выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы выплатил долг за 2 равных платежа?**

Решение: Пусть  $S$ - сумма долга,  $X$ - сумма ежегодного платежа. Составим уравнение для нахождения ежегодной выплаты при условии, что Иван выплатил долг тремя равными платежами.

$S \cdot 1,2 - X$  остаток долга после 1 платежа

$(S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X$  остаток долга после 2 платежа

$((S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X$  остаток долга после 3 платежа

$((S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X = 0$  теперь раскрываем скобки и выражаем  $X$

$$((S \cdot 1,2^2 - 1,2 \cdot X) - X) \cdot 1,2 - X = 0$$

$$S * 1,2^3 - 2,2 * X - 1,2 * X - X = 0$$

$$S * 1,2^3 - 2,2 * 1,2 * X - X = 0$$

$$X = \frac{S * 1,2^3}{3,64}$$

Пусть S- сумма долга, Y- сумма ежегодного платежа. Составим уравнение для нахождения ежегодной выплаты при условии, что Иван выплатил долг двумя равными платежами.

$S * 1,2 - Y$  остаток долга после 1 платежа

$(S * 1,2 - Y) * 1,2 - Y$  остаток долга после 2 платежа

$(S * 1,2 - Y) * 1,2 - Y = 0$  раскроем скобки и выразим Y

$$S * 1,2^2 - 1,2 * Y - Y = 0$$

$$Y = \frac{S * 1,2^2}{2,2}$$

Теперь мы можем найти на сколько меньше заплатил бы Иван , если

платил бы не тремя , а двумя платежами:  $3 * X - 2 * Y = \frac{3S * 1,2^3}{3,64} - \frac{2S * 1,2^2}{2,2} =$

$$= \frac{3S * 1,2 * 1,2 * 1,2}{3,64} - \frac{2S * 1,2 * 1,2}{2,2} = \frac{3S * 12 * 12 * 1,2}{364} - \frac{2S * 12 * 1,2}{22}$$

$$= \frac{3S * 3 * 12 * 1,2}{91} - \frac{S * 12 * 1,2}{11} = \frac{129,6S}{91} - \frac{14,4S}{11}$$

$$= \frac{129,6 * 900900}{91} - \frac{14,4 * 900900}{11}$$

$$= 129,6 * 9900 - 14,4 * 81900 = 1283040 - 1179360 = 103680$$

Ответ: 103680

*Задачи для самостоятельного решения:*

1. 31 декабря 2014 года Степан взял в банке 4004000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредиты следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е.) увеличивает долг на 20%), затем Степан производит в банк платеж. Весь долг Степан выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа. Ответ: 460800 руб.



2. 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа? Ответ: 806400

**4. В июле планируется взять кредит на сумму 6409000 рублей. Условия его возврата таковы:**

- **каждый январь долг возрастает на 12,5% по сравнению с концом предыдущего года;**
- **с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.**

**Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?**

Решение:

Пусть  $S$ - сумма кредита, а  $X$ - сумма ежегодной выплаты.

1 год в январе сумма увеличивается на 12,5 % по сравнению с прошлым годом:

$$S * 1,125 = \frac{9}{8} S$$

Затем с февраля по июль производим выплату  $X$ :  $\frac{9}{8} S - X$

2 год в январе сумма увеличивается на 12,5 % по сравнению с прошлым годом( проценты начисляются на остаток):  $(\frac{9}{8} S - X) * \frac{9}{8}$

Затем с января по февраль производим вторую выплату:  $(\frac{9}{8} S - X) * \frac{9}{8} - X$

Так как после второй выплаты кредит будет погашен, то остаток по кредиту равен нулю, составляем уравнение:  $(\frac{9}{8} S - X) * \frac{9}{8} - X = 0$

Раскрываем скобки и приводим подобные и находим неизвестное  $X$ :

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 S - \frac{17}{8} X = 0 \quad X = \frac{\frac{81S}{64}}{\frac{17}{8}} = \frac{49S}{136} = \frac{81 \cdot 6409000}{136} = 3817125$$

Ответ: 3817125

*Задачи для самостоятельного решения:*

1. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк  $X$  рублей. Какой должна быть сумма  $X$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)? Ответ: 2 296 350.

В июле планируется взять кредит на сумму 8052000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)? (Ответ: 3 110 400)

**5. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.**

**Условия его возврата таковы:**

- **каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;**
- **с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.**

**Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?**

Решение:

Пусть  $S$ - сумма кредита , а  $X$ - сумма ежегодной выплаты.

Первоначально сумма долга составляет  $S$

Через год  $S \cdot 1,2$

После первой выплаты  $S \cdot 1,2 - X$

На второй год  $(S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2$

После второй выплаты  $(S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X$

На третий год  $((S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2$

После третьей выплаты  $((S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X$

Так как через три года клиент расплатиться за кредит, то составим уравнение

$$((S \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X = 0$$

Раскроем скобки, приведем подобные и найдем неизвестное  $S$ ;

$$(S \cdot 1,2^2 - 1,2 \cdot X - X) \cdot 1,2 - X = 0$$

$$S \cdot 1,2^3 - 3,64 \cdot X = 0$$

$$S = \frac{3,64 \cdot X}{1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2} = \frac{3,64 \cdot 2,16}{1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2} = \frac{3,64 \cdot 2,16}{12 \cdot 12 \cdot 1,2} = \frac{91 \cdot 2,16}{3 \cdot 12 \cdot 1,2} = \frac{91 \cdot 1,8}{3 \cdot 12} = \frac{91 \cdot 0,6}{12} = \frac{91 \cdot 0,6}{12} = 91 \cdot$$

$0,05 = 4,55$  млн. рублей

Ответ:  $4,55$  млн. рублей

Литература:

- 1) А.В. Семенов и др. «Математика. Как получить максимальный балл на ЕГЭ» «Интеллект-Центр» Москва 2015
- 2) Типовые экзаменационные варианты под редакцией И.В.Яценко : «Национальное образование» Москва 2016
- 3) <http://kopilkaurokov.ru/>
- 4) <http://infourok.ru/>
- 5) <http://www.openclass.ru/>
- 6) <http://www.zavuch.ru/>
- 7) <http://www.berdov.com/>
- 8) <http://www.ctege.info/>
- 9) <http://geometriyaprosto.ru/>
- 10) <http://reshuege.ru/>